

7/4/21

#6

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ παριστάνει στροφή ως προς επίπεδο.

$$A \cdot A^t = I$$

$$\det A = 1;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \right\} \text{Euler}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$\underline{\lambda_1 = 1} \quad V(\lambda) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x + y = 0 \Rightarrow x = y \\ -2z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{matrix}$$

$$V(\lambda) = \angle (1, 1, 0) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right\rangle$$

Βρίσκουμε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det P = 1 \quad \det P = \det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \det 1 = 1$$

$$P^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^t \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad \cos \phi = -1 \quad \underline{\phi = \pi} \\ \sin \phi = 0$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} & -1/2 \end{pmatrix} \quad A \cdot A^t = I = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{9}{4} = -1 < 0 \Rightarrow A \text{ - orthogonale}$$

$$\nabla(1): (A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} & -3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -x + \frac{3}{\sqrt{3}} y = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{\sqrt{3}} y = y \cdot \sqrt{3}$$

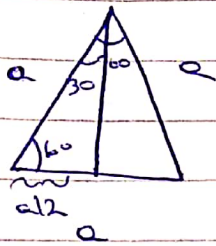
$$\nabla(1) = \left\langle (\sqrt{3}, 1) \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$\nabla(-1): (A + I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/2 & 3/2\sqrt{3} \\ 3/2\sqrt{3} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x + \frac{3}{\sqrt{3}} y = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\sqrt{3}}{3} y \quad \nabla(-1) = \left\langle \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right) \right\rangle = \left\langle \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle$$

Ο άξονας συμμετρίας είναι ο διόχωρος $\pi(1)$. Δηλ. η ευθεία που περιγράφεται από $\pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi/3 & \sin \pi/3 \\ \sin \pi/3 & -\cos \pi/3 \end{pmatrix}$$



$$\cos 60^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

Η συνιστα είναι $y = \frac{\eta}{3}$. Άρα ο άξονας συμμετρίας συνιστα

$$\frac{y}{2} = \frac{\eta}{6} \quad \text{με τον άξονα } x'x''$$

$$3) \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{4} & a & \varepsilon \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{4} & b & \eta \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{4} & \delta & \nu \\ 0 & 0 & \zeta & \rho \end{pmatrix} : \text{Ορθογώνιος}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{4} & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{4} & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τα βάζω για να εφαρμόσω την Gram-Schmidt όχι ότι $a=0, \varepsilon=1$ νοκ...

$$u_1 \perp u_2 \perp u_3$$

$$\begin{aligned} v_4 &= u_4 - \frac{\langle u_4, u_3 \rangle}{\langle u_3, u_3 \rangle} u_3 - \frac{\langle u_4, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 - \frac{\langle u_4, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \\ &= (1, 0, 0, 0) - 0 \cdot u_3 - \frac{1/\sqrt{4}}{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ \sqrt{4} & \sqrt{4} & \sqrt{4} & 0 \end{pmatrix} - \frac{1/\sqrt{3}}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}}, 0 \right) = \left(\frac{4\sqrt{2}-3-\sqrt{4}}{4\sqrt{2}}, \frac{-6-\sqrt{4}}{4\sqrt{2}}, \frac{9-\sqrt{4}}{4\sqrt{2}}, 0 \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{25}{42}, \frac{-20}{42}, \frac{-5}{42}, 0 \right) \rightarrow (25, -20, -5, 0) \rightarrow (5, -4, -1, 0)$$

$$\| (5, -4, -1, 0) \| = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{4} & 0 & 5/\sqrt{42} & \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{4} & 0 & -4/\sqrt{42} & \\ 1/\sqrt{3} & -3/\sqrt{4} & 0 & -1/\sqrt{42} & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \end{array} \right) \quad \underline{\text{OXI KONTAKTOS}}$$

5) $A = A^t$, $B = -B^t$, $AB = BA$ $\det(A-B) \neq 0$ $\Rightarrow (A+B) \cdot (A-B)^{-1}$
 είναι ορθογώνιος

Now:

$$A-B = A+B^t = A^t+B^t \Rightarrow \det(A^t+B^t) \neq 0 \Rightarrow \det(A+B)^t \neq 0 \Rightarrow \det(A+B) \neq 0$$

$$(A+B)(A-B)^{-1} \text{ ορθογώνιος } \Leftrightarrow (A+B)(A-B)^{-1} [(A+B)(A-B)^{-1}]^t = I^? \quad (*)$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} \Leftrightarrow (A^{-1})^t \cdot A^t = \underbrace{(A^t)^{-1} \cdot A^t}_I \Leftrightarrow (A^{-1})^t A^t = I \Leftrightarrow (A \cdot A^{-1})^t = I \Rightarrow I^t = I$$

10x10

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow (A+B)(A-B)^{-1} [(A-B)^{-1}]^t (A+B)^t = (A+B)(A-B)^{-1} [(A-B)^t]^{-1} (A+B)^t \\ &= (A+B)(A-B)^{-1} (A^t - B^t)^{-1} (A-B) = (A+B)(A-B)^{-1} (A+B)^{-1} (A-B) = \\ &= (A+B) [(A+B)(A-B)]^{-1} (A-B) \stackrel{AB=BA}{=} (A+B) (A^2 - B^2)^{-1} (A-B) = \\ &= (A+B) \underbrace{[(A-B)(A+B)]^{-1}}_I (A-B) = \underbrace{(A+B)(A+B)^{-1}}_I \underbrace{(A-B)^{-1}(A-B)}_I = I \end{aligned}$$

$$4) A = \begin{pmatrix} \overset{v_1}{\cos \phi} & \overset{v_2}{-\sin \phi} & \overset{v_3}{0} \\ \sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi & -\sin \phi \\ \sin^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad A \cdot A^t = I$$

$$(-\sin \phi)^2 + \cos^2 \phi = 1$$

$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \sin^4 \phi = \cos^2 \phi (1 + \sin^2 \phi) + \sin^4 \phi =$$

$$= (1 - \sin^2 \phi) (1 + \sin^2 \phi) + \sin^4 \phi = 1 - \sin^4 \phi + \sin^4 \phi = 1$$

$$v_1 \perp v_2 \perp v_3 \quad \langle v_1, v_2 \rangle = -\cos \phi \sin \phi + \sin \phi \cos^3 \phi + \sin^3 \phi \cos \phi =$$

$$= -\cos \phi \sin \phi + \sin \phi \cos \phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = 0$$

$$v_2 \perp v_3 \quad \langle v_2, v_3 \rangle = -\cos^2 \phi \sin \phi + \sin \phi \cos^2 \phi = 0 \quad A^{-1} = A^t$$

$$\det A = \cos \phi \det \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi \cos \phi & \cos \phi \end{pmatrix} + \sin \phi \det \begin{pmatrix} \sin \phi \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin^2 \phi & \cos \phi \end{pmatrix} =$$

$$= \cos \phi (\cos^3 \phi + \sin^2 \phi \cos \phi) + \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \sin^4 \phi = \cos^4 \phi + 2\sin^2 \phi \cos^2 \phi + \sin^4 \phi =$$

$$= (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)^2 = 1$$

Από το θ-Εύλερ $\Rightarrow$ ο Α παράγει στροφές ως προς ενιαίο ο.1
 στον άξονα που ορίζεται από ένα ιδίο διάνυσμα ως $\lambda = 1$

Ναίς μπορεί να βρω τον άξονα?

$$(A - 1 \cdot I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \phi - 1 & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi \cos \phi & \cos^2 \phi - 1 & -\sin \phi \\ \sin^2 \phi & \sin \phi \cos \phi & \cos \phi - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\cos \phi - 1)x - y \sin \phi = 0$$

$$\sin \phi \neq 0 \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \dots$$

$$y = \frac{\cos \phi - 1}{\sin \phi} x$$

$$\sin y \cos y x - \sin^2 y y - \sin y z = 0 \Rightarrow \cos y x - \sin y \frac{\cos y - 1}{\sin y} x - z = 0$$

$$\Rightarrow z = x$$

$$V(1) = \left\langle 1, \frac{\cos y - 1}{\sin y}, 1 \right\rangle = \left\langle (\sin y, \cos y - 1, \sin y) \right\rangle (*)$$

$$\sqrt{2 \sin^2 y + \cos^2 y + 1 - 2 \cos y} = \sqrt{2 + \sin^2 y - 2 \cos y} = a$$

$$(*) \left\langle \frac{\sin y}{a}, \frac{\cos y - 1}{a}, \frac{\sin y}{a} \right\rangle \text{ κανονισμός}$$

$$\text{Αν } \sin y = 0 \Rightarrow y = n \pi \text{ ή } 0$$

$$\begin{pmatrix} \cos n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ή } y = 0 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ συνέχεια...

$T: V^N \rightarrow W^N$ Ευκλείδειοι χώροι

$$\langle v, v' \rangle = \langle Tv, Tv' \rangle$$

Αυτό το Ευκλείδειο γινόμενο πιθανώς να είναι διαγόμενο από το άλλο

Ισομετρία $\Leftrightarrow$ Διατελεί το v και τις u ς u ς u ς είναι κατ-1
Ο πίνακας μιας ισομετρίας ως προς ορθοκανονική βάση είναι ορθογώνιος και αντιστρέφεται

Παράδειγμα: Αν V^N, W^N είναι Ευκλείδειοι χώροι $\Leftrightarrow$ υπάρχει ένας ισομετρικός ισομορφισμός

Π.χ. 1) Να οριστεί ισομετρία από τον $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}_2[x]$ με το $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dx$

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$$

$$\text{Ορθοκανονικές βάσεις: } \mathbb{R}^3 = \langle \overset{u_1}{(1, 0, 0)}, \overset{u_2}{(0, 1, 0)}, \overset{u_3}{(0, 0, 1)} \rangle$$

$$\mathbb{R}_2[x] = \langle 1, \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right), \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \rangle$$

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{9 \cdot 20} = 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$T(u_1) = 1, \quad T(u_2) = \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad T(u_3) = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

$$T(a, b, d) = T(au_1 + bu_2 + du_3) = aT(u_1) + bT(u_2) + dT(u_3) =$$

$$= a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right) + d \cdot \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(a, b, d) = d\sqrt{180} \cdot x^2 + (b\sqrt{12} - d\sqrt{180})x + (a - b\sqrt{3} + d\sqrt{5}) \cdot 1$$

Π.χ. 2) Να οριστεί ισομετρία από τον $\mathbb{R}_2[x]$ με το εσωτερικό $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \cdot g \, dx$ στον $\mathbb{R}^3$ με το κανονικό εσωτερικό

Θα θαυμάσουμε ορθοκανονικές βάσεις

$$\mathbb{R}_2[x] = \langle 1, 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \rangle$$

$$\mathbb{R}^3 = \langle \overset{u_1}{(1, 0, 0)}, \overset{u_2}{(0, 1, 0)}, \overset{u_3}{(0, 0, 1)} \rangle$$

Ορίζουμε την $T': \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τρόπο:

$$T'(1) = u_1, \quad T'\left(2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = u_2, \quad T'\left(6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right) = u_3$$

Βρες τον τρόπο $T'(ax^2 + bx + d)$

Νόηση το εγγραφέας το τυχόν ax^2+bx+c συνιστά ως
 ορθοκανονική βάση $ax^2+bx+c = k \cdot 1 + \frac{a+b}{2\sqrt{3}}(x-1) + \frac{a}{6\sqrt{3}}(x^2-x+1)$

Π.β. k, λ, μ συνιστά των a, b, c

$$a = \mu 6\sqrt{3} \Rightarrow \mu = \frac{a}{6\sqrt{3}}$$

$$b = \lambda 2\sqrt{3} - \mu 6\sqrt{3} \Rightarrow b = \lambda 2\sqrt{3} - \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = \lambda 2\sqrt{3} - \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{a+b}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda = \frac{a+b}{2\sqrt{3}}$$

$$c = k - \lambda \sqrt{3} + \mu \sqrt{3} \Rightarrow c = k - \frac{a+b}{2} + \frac{a}{6\sqrt{3}} \Rightarrow 6c = 6k - 3a - 3b + a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6k = 6c + 3a + 3b \Rightarrow k = \frac{2a+3b+6c}{6}$$

$$T'(ax^2+bx+c) = T'\left(\frac{2a+3b+6c}{6} \cdot 1 + \frac{a+b}{2\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{a}{6\sqrt{3}} \frac{6\sqrt{3}}{6}(x^2-x+1)\right)$$

$$= \frac{2a+3b+6c}{6} \underbrace{T'(1)}_{u_1} + \frac{a+b}{2\sqrt{3}} \underbrace{T'\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}(x-1)\right)}_{u_2} + \frac{a}{6\sqrt{3}} \underbrace{T'\left(\frac{6\sqrt{3}}{6}(x^2-x+1)\right)}_{u_3}$$

$$= \frac{2a+3b+6c}{6} (1, 0, 0) + \frac{a+b}{2\sqrt{3}} (0, 1, 0) + \frac{a}{6\sqrt{3}} (0, 0, 1) =$$

$$= \left(\frac{2a+3b+6c}{6}, \frac{a+b}{2\sqrt{3}}, \frac{a}{6\sqrt{3}} \right)$$

Παράδειγμα θεώρημα αναπαράστασης του Riesz

Δίνεται η απεικόνιση $T: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ με νόμο $T(ax+b) = b$.
Να δείξετε ότι η T είναι γραμμική και να βρείτε τον πυρήνα της. Να βρείτε ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}[x]$ (δηλ. $f_0(x) \in \mathbb{R}[x]$) με $f_0(x) \perp \ker T$. Να υπολογίσετε το διάνυσμα $h(x) = \frac{T(f_0)}{\langle f_0, f_0 \rangle}$.

Να δείξετε ότι $\langle T(g(x)), h(x) \rangle = \langle g(x), h(x) \rangle$ (Η απεικόνιση T αναπαρίσταται (παραγράφεται) πλήρως από το $h(x)$ και το εσωτερικό γινόμενο)

Λύση:

$$\begin{aligned} T(kf(x) + \lambda g(x)) &= T(k(ax+b) + \lambda(a'x+b')) = \\ &= T((ka + \lambda a')x + kb + \lambda b') = kb + \lambda b' = kT(ax+b) + \lambda T(a'x+b') = \\ &= kT(f(x)) + \lambda T(g(x)) \quad \text{Γραμμική} \end{aligned}$$

$$\ker T? \quad T(ax+b) = 0 \Rightarrow b = 0, a \in \mathbb{R} \text{ Άρα } T(ax) = 0$$
$$\ker T = \{ax \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle x \rangle \quad \text{Επίσης η } T \text{ είναι επί}$$

$$\begin{aligned} \text{Θέλουμε } f_0(x) = ax + b_0 \text{ ώστε } f_0(x) \perp \ker T = \langle x \rangle \quad (\neq) \\ \Rightarrow \langle f_0(x), x \rangle = 0 \quad (\neq) \int_0^1 (ax + b_0)x dx = 0 \Rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b_0}{2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow b_0 = -\frac{2a}{3} \Rightarrow f_0(x) = ax - \frac{2a}{3} \cdot 1, a \in \mathbb{R} \quad (*) \end{aligned}$$

$$h(x) = \frac{T(f_0)}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0, \quad T(f_0) = T\left(ax - \frac{2a}{3}\right) = -\frac{2a}{3}$$

$$\begin{aligned} \langle f_0, f_0 \rangle &= \int_0^1 \left[a\left(x - \frac{2}{3}\right) \right]^2 dx = a^2 \int_0^1 \left(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} \right) dx = \\ &= a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{9} \right) = a^2 \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3} \right) = a^2 \cdot \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$h(x) = \frac{-\frac{206}{3}}{a_0 x - \frac{1}{9}} a_0 \left(x - \frac{2}{3} \right) = -6 \left(x - \frac{2}{3} \right) = -6x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = -6x + 4$$

$$(*) \quad \boxed{T(g(x)) = T(ax+b) = b} \text{ και θέλουμε το } \boxed{\langle g(x), h(x) \rangle =}$$

$$= \int_0^1 g \cdot h \, dx = \int_0^1 (ax+b)(-6x+4) \, dx = \int_0^1 (6ax^2 + (4a-6b)x + 4b) \, dx =$$

$$= -\frac{6a}{3} + \frac{4a-6b}{2} + 4b = -2a + 2a - 3b + 4b = \boxed{b}$$

Δείξαμε ότι $T(g(x)) = \langle g(x), h(x) \rangle$. Δηλ. η Τσυναρτιστική μένου του $h(x)$